

第12章 量子論の誕生

黒体放射の研究はエネルギー量子仮説の形で場の量子論を生み出した。ギブズの統計物理学で確立されたエネルギーの等分配則が破綻していることはエネルギー量子の存在根拠でもある。古典的には波と考えられていたものに粒子性を容認するのが場の量子論であり、古典的には粒子と考えられているものに波動性を容認するのが粒子の量子論である。前期量子論は波と粒子の二重性を容認し、これを定式化する努力だった。場の量子論の始まりは粒子の量子論よりも早かったが、場の量子論の定式化は粒子の量子論よりも遅れた。

12.1 放射式

黒体放射についてキルヒホッフ (Gustav Robert Kirchhoff, 1824-87年) が残した第二の問題「 U_ω は温度と周波数のどのような関数か？」に対する回答の一部分が1893年に発表されたヴィーンの変位則

$$U_\omega \propto \omega^3 f\left(\frac{\omega}{T}\right) \quad (12.1)$$

である。 U_ω のより具体的な関数形を捜す仕事「 $f(\omega/T)$ は ω/T のどのような関数か？」が残され、いくつかの関数形が提唱された。

U_ω の関数形はヴィーンの変位則に従うだけでなく、次の2つの厳しい条件を満足する必要がある：

第一条件：ヴィーンの変位則(12.1)に含まれる $f(\omega/T)$ の関数形が観測結果に合う。

第二条件：積分

$$U = \int_0^\infty U_\omega d\omega \quad (12.2)$$

は有限である。これは放射のエネルギー密度が有限であることを意味する。

関数 $f(\omega/T)$ の具体的表現を捜す仕事は、二つの方法で成された。一つは、

気体分子運動論とそこから生まれた統計物理学の手法を使うことであり、ヴィーンの放射式（1896年）とレイリーの放射式（1900年）とが提案された。もう一つは、観測結果を表現する経験式を捜すことであり、プランクの放射式（1900年）が提案された。

12.2.1 ヴィーンの放射式

ヴィーンの放射式（1896年）はヴィーンの変位則(12.1)と気体分子運動論の結果とを直感的に結合したものである。ヴィーン（Wilhelm Carl Werner Otto Fritz Franz Wien、1864-1928年）は1896年論文「黒体からの放射スペクトルにおけるエネルギー分布」で、気体分子運動論のマクスウェル分布（1860年）との類推により、

$$f\left(\frac{\omega}{T}\right) = \exp\left(-b \frac{\omega}{T}\right) \quad (12.3)$$

と仮定した。すなわち

$$U_{\omega} \propto \omega^3 \exp\left(-b \frac{\omega}{T}\right) \quad (12.4)$$

がヴィーンの放射式である。ここで b は[温度]×[時間]の次元の正の定数である。 ω^3 は ω の単調増加関数であるが $\exp(-b \omega/T)$ は ω の単調減少関数なので、ヴィーンの放射式では、 U_{ω} が最大となるような角周波数 ω_{\max} が存在し、 $b \omega_{\max}/T = 3$ である。

ヴィーンの放射式は、角周波数 ω で積分すると有限となるので、第二条件を満足している。

さらに、ヴィーンの放射式は1896年迄の測定結果とよく一致した。1896年迄の測定結果には4つの特徴がある。第一に、スペクトル密度が最大となる角周波数 ω_{\max} が存在する。第二に、 ω_{\max} は温度に比例する（例えばパッシェンの1895年の実験）。この二つはヴィーンの放射式(12.4)からは自明である。第三に高周波数（ $b \omega/T \gg 1$ ）ではヴィーンの放射式は測定結果とよく一致した。最後に低周波数（ $b \omega/T \ll 1$ ）では $U_{\omega} \propto \omega^3$ となり、当時迄の測定結果とよく一致した。ヴィーンの放射式が提出された翌年（1897年）

にはパッシェンも実験的にヴィーンの放射式を支持している。こういうわけでヴィーンの放射式はかなり良い放射式だった。

しかし、実験技術が進歩してより低周波数領域での測定が行われるようになると周波数依存性が低周波数領域で観測結果と明らかにずれることが判明した。例えばルマー (O. Lummer, 1860-1925年) とプリングスハイム (E. Pringsheim, 1859-1917年) の測定 (1899年) によれば、 $b \omega/T \ll 1$ では $U_\omega \propto \omega^2$ に近い。従って、ヴィーンの放射式は第一条件を満足しない。ヴィーンの放射式は実験により否定された。

なお、長岡半太郎はヴィーンの放射式が提出された1896年に帰国している。もう少し長く滞在していたら、日本の揺籃期の物理学が変わっていたかも知れない。

12.2.2 レイリーの放射式

レイリー卿 (John William Strutt 3rd Baron Rayleigh, 1842-1919年) は1900年論文「完全放射の法則についての注意」でギブズの統計物理学のエネルギー等分配則に基づく議論を行い

$$U_\omega \propto \omega^2 T \quad (12.5)$$

とした。これをレイリーの放射式と呼ぶことにする。レイリーの放射式をヴィーンの変位則(12.1)と比較すると

$$f\left(\frac{\omega}{T}\right) = \frac{T}{b \omega} \quad (12.6)$$

である。

レイリーの放射式(12.5)は低周波数 ($b \omega/T \ll 1$) 領域でルマーとプリングスハイムの測定 (1899年) と一致する。しかし、レイリーの放射式によれば、 U_ω は角周波数 ω の単調増加関数だから ω_{\max} が存在しない。この意味でレイリーの放射式は実験事実と反する。さらにレイリーの放射式を全角周波数で積分すると無限大に発散 (紫外発散) する。これでは放射のエネルギーが無限大になる。レイリーの放射式は第一条件も第二条件も満足しな

い。

紫外発散を取り除き ω_{\max} が存在するようにするために、レイリーの放射式(12.6)とヴィーンの放射式(12.3)との折衷案として

$$f\left(\frac{\omega}{T}\right) = \frac{T}{\omega} \exp\left(-b \frac{\omega}{T}\right)$$

を採用すると、

$$U_{\omega} \propto \omega^2 T \exp\left(-b \frac{\omega}{T}\right)$$

となる。 $b \omega/T \ll 1$ では $U_{\omega} \propto \omega^2$ となり、ルマーとプリングスハイムの測定結果(1899年)とも一致する。この折衷案では $b \omega_{\max}/T = 2$ となる。

1 2.2.3 プランクの放射式

プランク(Max Planck、1858-1947年)は1879年に熱力学第二法則の研究で学位を取った。この時の研究指導者はヘルムホルツとキルヒホッフである。プランクはその後も熱力学の研究を続け、その成果を「熱力学講義」(1897年)にまとめるとともに、熱力学第二法則と電磁気学との関係を議論して放射式を導出することに挑戦していた(1895~99年)。その結果、プランクは、「既存の物理学の枠組みから正しい放射式を調べることは無理があり、新しい実験事実に着目する必要がある」と判断した。

$b \omega/T \gg 1$ の場合の極限法則がヴィーンの放射式であると考えていたプランクは、最新の実験結果を踏まえつつ、測定結果をあらわすもっとも単純な経験式として、プランクの放射式を提案した(1900年)。プランクの放射式は1900年10月19日の例会でルーベンス(H. Rubens、1865-1922年)とクルルバウム(F. Kurlbaum、1857-1927年)の測定結果の発表に続く討論における飛び入り講演として発表されたものであり、講演タイトルは「ヴィーンのスเปクトル式の一つの改良について」^{注1}である。

プランクの放射式は、

^{注1} この講演概要の辻哲夫による邦訳は物理学史研究刊行会編物理学古典論文叢書1「熱輻射と量子」(東海大学出版会、1970)に掲載されている。

$$U_{\omega} \propto \omega^3 \frac{1}{\exp\left(b \frac{\omega}{T}\right) - 1} \quad (12.7)$$

したがって

$$f\left(\frac{\omega}{T}\right) = \frac{1}{\exp\left(b \frac{\omega}{T}\right) - 1} \quad (12.9)$$

である。

プランクの放射式はそれまでのどの放射式よりも優れていた。まず観測されている全周波数領域で測定結果と一致する。このことは、経験式だから、当然である。従って、 ω_{\max} が存在する。第二に全周波数で U_{ω} を積分しても有限である。つまり紫外発散が無い。

放射式 $f(\omega/T)$ の $b\omega/T$ 依存性を図12.1に示す。この図にはヴィーンの放射式、レイリーの放射式とともにプランクの放射式 $f(\omega/T)$ が示されている。

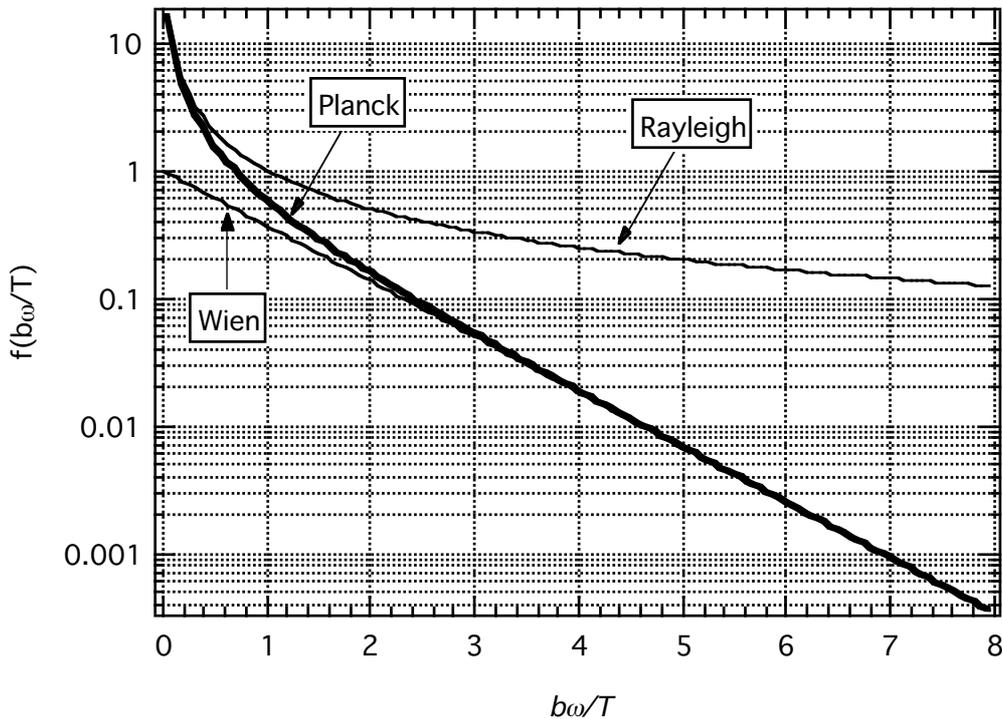


図12.1 $f(\omega/T)$ の $b\omega/T$ 依存性

プランクの放射式は高周波数 ($b\omega/T \gg 1$) では、ヴィーンの放射式

(12.4)と一致する。 $b \omega/T \gg 1$ ではプランクの放射式の分母に現れる1が無視できるからである。逆に低周波数 ($b \omega/T \ll 1$) ではレイリーの放射式(12.5)と一致する。 $b \omega/T \ll 1$ では

$$\exp\left(b \frac{\omega}{T}\right) - 1 \cong b \frac{\omega}{T}$$

に気づくと、このことは式の上からも明かである。この意味で、プランクの放射式は高周波数側の実験結果を表現するヴィーンの放射式と低周波数側の実験結果を表現するレイリーの放射式とを巧みにつないだ補間式でもある。

プランクの放射式(12.7)を角周波数 ω で微分すると

$$\frac{dU_{\omega}}{d\omega} \propto \left[\frac{\omega}{\exp\left(b \frac{\omega}{T}\right) - 1} \right]^2 \left[\left(3 - b \frac{\omega}{T}\right) \exp\left(b \frac{\omega}{T}\right) - 3 \right]$$

となる。したがって ω_{\max} は超越方程式

$$\left(3 - b \frac{\omega}{T}\right) \exp\left(b \frac{\omega}{T}\right) = 3$$

の解である。この超越方程式の数値解は

$$b \frac{\omega_{\max}}{T} = 2.82144\dots$$

であり、プランクの放射式から得られる $b \omega_{\max}/T$ の値はヴィーンの放射式から得られる値3に近い。ルマーとプリングスハイムの実験結果(1900年) $\omega_{\max}/2\pi T \approx 5.880 \times 10^{10} \text{ s}^{-1} \text{ K}^{-1}$ と比較すると

$$b \cong \frac{4.798 \times 10^{-11}}{2\pi} \text{ s K} \quad (12.8)$$

となる。これは現代の値

$$b \cong \frac{4.799 \times 10^{-11}}{2\pi} \text{ s K}$$

に非常に近い。

プランクの放射式はキルヒホッフの第二問題に対する回答である。これでキルヒホッフが残した2つの問題が全て解決された。プランクは師キルヒ

ホッフの残した問題を完全に解決したことになる。

1 2.3 エネルギー量子仮説

シュテファンの法則（1879年）という経験則がボルツマンにより明確に説明され（1884年）、ヴェーバーの指摘（1888年）という経験則がヴィーンにより明確に説明された（1893年）ように、経験式としてのプランクの放射式も明確に説明されなければならない。

プランクは、経験式として提案したプランクの放射式

$$f\left(\frac{\omega}{T}\right) = \frac{1}{\exp\left(b\frac{\omega}{T}\right) - 1} \quad (12.9)$$

の統計物理学的意味を考え、1900年12月14日の例会で概要を発表した。プランクが、経験式として提案した放射式の統計物理学的意味付けをわずか2か月後に発表出来たのは、それまでの熱力学研究の土台があったからだろう。講演タイトルは「正常スペクトルにおけるエネルギー分布の法則の理論」であり、その詳細は1901年論文「正常スペクトル中のエネルギー分布の法則について」^{注2}で報告された。

プランクは、黒体放射を多数の振動子の集まりと考えると、統計物理学的議論を行った。ボルツマンの原理を受け容れていたプランクは黒体放射のエントロピーが有限であるためには黒体放射を多数の振動子の集まりとみなさざるを得ない、と考えた。黒体放射を多数の振動子の集まりとみなしたことは、当時としては革命的な考え方であり、現在では場の量子化あるいは第二量子化と呼ばれている考え方である。

角周波数 ω の電磁場は角周波数 ω の振動子の集まりであり、角周波数 ω の振動子1個のエネルギーを ε_ω とする。角周波数が区間 $[\omega, \omega + d\omega]$ にある放射の

^{注2} Max Planck, Ueber das Gesets der Energieverteilung im Normalspectrum, Annalen der Physik, 4 (1901) pp,553-563 の辻哲夫による邦訳は物理学史研究刊行会編物理学古典論文叢書1「熱輻射と量子」（東海大学出版会、1970）に掲載されている。

エネルギーは単位体積あたり

$$U_{\omega} d\omega = \varepsilon_{\omega} g(\omega) d\omega f\left(\frac{\omega}{T}\right) \quad (12.10)$$

である。ここで $g(\omega) d\omega$ は区間 $[\omega, \omega + d\omega]$ にある振動モードの数（単位体積あたり）である。まず、波数の大きさ $k \equiv \omega/c$ が区間 $[k, k + dk]$ にある振動モードの数を調べよう。半径 k の球の表面積は $4\pi k^2$ であり、電磁波では2つの偏光があるので、区間 $[k, k + dk]$ にある振動モードの数は $2 \times 4\pi k^2 dk$ である。波数で考えたので、これを $(2\pi)^3$ で割ると $g(\omega) d\omega$ が得られる：

$$g(\omega) d\omega = \frac{2 \times 4\pi k^2 dk}{(2\pi)^3} = \frac{1}{\pi^2} k^2 dk$$

となる。 $k \equiv \omega/c$ を代入すると

$$g(\omega) d\omega = \frac{1}{\pi^2} \frac{\omega^2 d\omega}{c^3} \quad (12.11)$$

となる。これを(12.10)に代入すると

$$U_{\omega} d\omega = \frac{\varepsilon_{\omega}}{\pi^2} \frac{\omega^2 d\omega}{c^3} f\left(\frac{\omega}{T}\right)$$

すなわち

$$U_{\omega} = \frac{\varepsilon_{\omega}}{\pi^2} \frac{\omega^2}{c^3} f\left(\frac{\omega}{T}\right) \quad (12.12)$$

となる。ここまでの黒体放射を多数の振動子の集まりと考えて統計物理学的議論を行った結果である。

この結果がヴィーンの変位則(12.1)を満足するためには、 ε_{ω} が ω に比例し、比例係数は温度に依らない定数でなければならない。比例係数を \hbar として

$$\varepsilon_{\omega} = \hbar \omega \quad (12.13)$$

とすると、(12.12)は

$$U_{\omega} = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \omega^3 f\left(\frac{\omega}{T}\right) \quad (12.14)$$

となる。黒体放射を多数の振動子の集まりと考えると、(12.13)はヴィーンの変位則からの要請である。比例係数 \hbar の値は実験と比べて決めなければならないが、(12.13)から明らかのように、 \hbar の次元は[エネルギー]×[時間]である。

プランクの放射式を使って、放射のエネルギー密度

$$U = \int_0^{\infty} U_{\omega} d\omega \quad (12.2)$$

を調べよう。右辺の被積分関数に(12.14)を代入すると

$$U = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \int_0^{\infty} \omega^3 f\left(\frac{\omega}{T}\right) d\omega$$

となる。ここでプランクの放射式(12.9)を使うと

$$U = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \int_0^{\infty} \frac{\omega^3}{\exp\left(b \frac{\omega}{T}\right) - 1} d\omega$$

となる。積分変数を

$$y \equiv a \frac{\omega}{T}$$

に変換すると

$$U = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \left(\frac{T}{a}\right)^4 \int_0^{\infty} \frac{y^3}{e^y - 1} dy$$

となる。数学公式

$$\int_0^{\infty} \frac{y^3}{e^y - 1} dy = \frac{\pi^4}{15}$$

使うと

$$U = \frac{\pi^2 \hbar}{15 c^3} \left(\frac{T}{a}\right)^4 \quad (12.15)$$

となる。これで黒体放射のエネルギー密度が決まった。

シュテファン・ボルツマンの法則 $U = 4(\sigma/c) T^4$ と(12.15)とを比較すると

$$\hbar = \frac{60}{\pi^2} c^2 \sigma a^4$$

となる。 c 、 σ の実測値と既に推定した b の値(12.8)とを使えば定数 \hbar の値が決まる。プランクは、 σ にはクルルバウムの測定結果(1898年)を使い、光速 c には $c = 3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$ 、 \hbar を使って定数 \hbar を推定し

$$\hbar = 1.04 \times 10^{-34} \text{ J s} \quad (12.16)$$

とした。これは現代の値

$$\hbar = 1.0545 \times 10^{-34} \text{ J s}$$

よりも1.14%小さい。恐らく b の値は正しいが、 $c^2 \sigma$ の値が1.2%小さかったのだろう。

\hbar の次元が[エネルギー]×[時間]であり、 b の次元が[温度]×[時間]なので、 \hbar/b の次元は、[エネルギー]/[温度]となり、ボルツマン定数 k_B の次元と同じである。プランクは \hbar/b の値も推定して $1.36 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$ を得た。これは当時別の方法で推定されていた k_B の値に近かったので、プランクは

$$k_B = \frac{\hbar}{b}$$

とした。プランクが推定した \hbar/b の値は当時の推定値の中では現代の値

$$k_B = 1.38054 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$$

に最も近い。

プランクの放射式の $f(\omega/T)$ は初項と公比が $\exp\left(-b \frac{\omega}{T}\right)$ であるような等比数列の和に等しい：

$$f\left(\frac{\omega}{T}\right) = \frac{1}{\exp\left(b\frac{\omega}{T}\right) - 1} = \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-n b \frac{\omega}{T}\right)$$

このことは1901年論文の最後に記されている。初項だけを取り出し、その他の項を完全に無視すると、ヴィーンの放射式が導かれる。従って、プランクの考察により、ヴィーンの放射式の意味づけも明らかにされた。 b を \hbar と k_B とで表現すると

$$f\left(\frac{\omega}{T}\right) = \frac{1}{\exp\left(\frac{\hbar \omega}{k_B T}\right) - 1} = \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{n \hbar \omega}{k_B T}\right)$$

となる。従って、 $f(\omega/T)$ は放射のエネルギーが振動子のエネルギー $\varepsilon_\omega = \hbar \omega$ を単位として量子化されているというイメージに直結する。

エネルギー量子の視点で図12.1を再検討しよう。エネルギーが ε_ω の振動子が n 個励起される確率は、大雑把には $\exp(-n \varepsilon_\omega/k_B T)$ に比例するだろう。高周波数 ($b \omega/T \gg 1$) では、 $\varepsilon_\omega \gg k_B T$ なので、 $\exp(-n \varepsilon_\omega/k_B T)$ が小さい。このために振動子が励起されたとしてもせいぜい1個程度だろう。このように考えると高周波数 ($b \omega/T \gg 1$) ではヴィーンの放射式が成り立つ。低周波数 ($b \omega/T \ll 1$) では、 $\varepsilon_\omega \ll k_B T$ なので、 $n = 1, 2, 3, \dots$ について $\exp(-n \varepsilon_\omega/k_B T)$ を考慮する必要がある。このために、ヴィーンの放射式から大きくずれて、エネルギー等分配則に基づくレイリーの放射式が良い近似となる。

経験式としてのプランクの放射式(12.9)の意味をこのように考察したプランクはエネルギー量子仮説を提唱したことになる。放射のエネルギーは振動子のエネルギー $\varepsilon_\omega = \hbar \omega$ を単位として量子化されていて $\varepsilon_\omega = \hbar \omega$ の非整数倍のエネルギーを禁止した。放射はそれ自身では熱平衡に達することが出来ないが黒体という名の熱浴とのエネルギーの授受を通して熱平衡に達する。この際のエネルギーの授受は連続的ではなく、 $\varepsilon_\omega = \hbar \omega$ を単位とすることを意味する。エネルギーの授受が不連続なのは、エネルギー等分配則を否定したことと同じである。

プランクの放射式は新しい物理を含んでいた。プランクによるエネルギー量子の導入は量子物理学の幕開けであり、プランクの放射式は量子統計力学の最初の成功例でもある。プランクが概要を発表したのが19世紀の最後の年であり、詳細報告が20世紀の最初の年だったことは、新しい物理学の幕開けに相応しい。またギブズの統計物理学が完成される（1902年）直前に、量子統計物理学が始まったことになる。

定数 $h \equiv 2\pi\hbar$ をプランクは第一の自然定数と呼んだが、現代では**プランク定数**と呼ばれている。 \hbar はディラック定数と呼ばれることもあるが、最近では \hbar もプランク定数と呼ばれることが多い。プランク定数は量子物理学で基本的な普遍定数である。更にプランクは第二の自然定数として k_B を採用し

$$b = \frac{\hbar}{k_B}$$

とした。 k_B は現代では**ボルツマン定数**と呼ばれている。ボルツマン定数も現代物理では基本的な普遍定数とされている。

シュテファン・ボルツマン定数 σ をプランク定数 \hbar とボルツマン定数 k_B とで表現すると

$$\sigma = \frac{\pi^2 k_B^4}{60 c^2 \hbar^3}$$

となる。ここに現れた光速 c も現代では物理学の普遍定数とされているので、シュテファン・ボルツマン定数 σ も物理学の普遍定数である。

ボルツマン定数とプランク定数の呼称についてはミリカン（Robert Andrews Millikan、1868-1953年）の寄与が大きい。1909年から1912年にかけて電気素量の測定を行ったミリカンにとって量子仮説は容認しやすかったのだろう。 k_B はミリカンによりボルツマン定数と呼ばれるようになった（1913年）。ミリカンの論文「プランク定数の光電効果による直接測定」（1916年）以降、プランク定数という呼称が定着した。

1 2.4 プランクの放射式の歴史的意義

プランクの放射式の歴史的意義はあまりにも大きい。ここでは4点を指摘して歴史的意義を強調しておく。

第一に、キルヒホッフが設定した問題が全て解決された。キルヒホッフが設定した第一問題はシュテファン・ボルツマンの法則により解決され、第二問題がプランクの放射式により解決された。プランクの放射式の意味を考えたプランクにより、シュテファン・ボルツマンの法則に現れたシュテファン・ボルツマン定数の意味も明らかにされた。

第二に、ギブズの統計物理学の破綻と量子統計物理学の誕生とを意味する。ギブズの統計物理学に基づくレイリーの粗い議論を出来るだけ厳密に行ったのがレイリー・ジーンズの放射式（1905年）であり、この議論により、ギブズの統計物理学に基づく限り、プランクの放射式が出てこないことが明らかになった。すなわち、ギブズの統計物理学の破綻を明らかにし、プランクの考察を通して量子物理学と量子統計物理学が産声をあげた。プランクの考察は、量子統計物理学の最初の成果である。

プランクの成果はすばらしいが、エネルギー量子仮説の重要性が認識されたのは第一回ソルベイ会議^{註3}（1911年）の成果である。1900年にプランクによりエネルギー量子仮説が提唱されてから第一回ソルベイ会議（1911年）までの間に、光量子仮説の提唱（1905年）、アインシュタイン比熱（1907年）、波と粒子の二重性の指摘（1909年）がある。いずれもアインシュタイン（Albert Einstein、1879-1955年）による。ウィーンの放射式はプランクの放射式の高周波数側の近似式であるが、ウィーンの業績はラウエ（Max Theodor Felix von Laue、1879-1960年）により「われわれを量子力学の玄関口にまで導いた」と評価され、ウィーンは1911年度ノーベル物理学賞を受賞した。プランクはエネルギー量子の発見による物理学への貢献で1918年度ノーベル物理学賞を受賞した。

^{註3} ソルベイ法でソーダ製法に成功したベルギーの工業化学者ソルベイがネルンストと相談して1911年にブリュッセルで開催した「放射理論と量子」に関わる会議が最初である。第1回ソルベイ会議にはヨーロッパの7カ国から23人ほどの代表的物理学者が招待された。

第三に、物理学の普遍定数の導入と推定を行った。プランクによりプランク定数 h とボルツマン定数 k_B が導入され、その値が推定された。プランクは放射式と測定結果から推定した k_B を使ってアヴォガドロ数

$$N_A = \frac{\text{気体定数}}{k_B}$$

や素電荷の値

$$e = \frac{\text{ファラデー定数}}{N_A}$$

も評価し、当時としてはもっとも確かな値を得ている。

第四に、1965年にペンジアス (A. A. Penzias, 1933-) とウィルソン (R. W. Wilson, 1936-) は全ての方向から同じ強さでやってくる電波として宇宙背景放射を発見した。宇宙背景放射はプランクの式で $T = 3.5\text{ K}$ としたものに一致したので、ビッグバン模型の強力な証拠とされた。現在の観測値は $T = 2.726\text{ K}$ であり、 0.0033 K 程度の異方性は太陽系が宇宙背景放射に対して運動しているためのドップラー効果によるとされている。この二人は宇宙背景放射の発見によって1978年のノーベル物理学賞を受賞した。なお、ブラックホールは外からしか観測できないが、宇宙背景放射よりも遙かに低温に見える。

最後にボルツマン定数とプランク定数の推定について述べよう。

プランク定数は力学的な定数なのでその推定は後に様々な方法で行われている。光電効果を使ってプランク定数を推定する仕事に取り組んだミリカンが「プランク定数の光電効果による直接測定」(1916年)では、

$$\text{光電子のエネルギー} = h\nu - \text{仕事関数}$$

を測定して、プランク定数を決めた。また、エネルギー E の電子が放出する制動放射の最大周波数 ω_{\max} と E との関係

$$E = h\omega_{\max}$$

が明らかになった(1915年)ので、 ω_{\max} と E との測定からプランク定数を決

めることもある。

最近では、ジョセフソン効果を使って磁束量子（シャピロステップ） $2\pi\hbar/(2e)$ を観測し、プランク定数 h を決めることも行われている。このためには電子の電荷 e が判っている必要がある。なおジョセフソン効果のステップ電圧が $2\pi\hbar/(2e)$ であることを使って電圧標準とする場合には $2e/h \cong 4.83598 \times 10^{14} \text{ Hz V}^{-1}$ を使う。ジョセフソン効果と量子ホール効果とを併用することでプランク定数 h を決めることもできる。いずれにしても量子物理学の成果が使われている。

ボルツマン定数は熱力学的な定数なので黒体放射のスペクトル分布から推定するか熱力学的揺らぎの測定以外に適当な方法が見あたらない。黒体放射のスペクトル分布から $b = \hbar/k_B$ を推定し、別の測定から求めたプランク定数を使って k_B を推定するのが一つの方法である。ペラン（Jean Baptiste Perrin、1870-1942年）らはコロイド粒子のブラウン運動を測定することでアボガドロ数 N_A を推定している。しかし、最近ではアボガドロ数 N_A と気体定数 R との推定結果からボルツマン定数 $k_B = R/N_A$ が推定されている^{註4}。アボガドロ数 N_A の推定には、 ^{12}C を質量基準とするX線結晶密度法と電子の質量 m_e とプランク定数 h を基準とするワットバランス法とがある。気体定数 R は音速測定から推定する。この際には ^{12}C を質量基準としている。ここには原子物理学の成果が使われている。質量標準が原子標準に置き換わる日が近いのだろう。

12.5 光量子仮説

エネルギーの量子化を提唱したプランクでさえ量子化されたエネルギーを形式的なものとみなしていた時代にアインシュタインは光量子仮説を提唱した（1905年）。統計物理学にあらわれる揺らぎを観測可能な実体とみなしたアインシュタインは量子化されたエネルギーをも物理的実体とみなしてい

^{註4} 藤井賢一、大苗 敦：基礎物理定数の新しい推奨値-アボガドロ定数とプランク定数の決定をめぐる最近の動き-、日本物理学会誌57(2002) pp.239-245

たのだ。

アインシュタインは電磁場と物体との相互作用をエネルギーの揺らぎとして把握して、1905年論文「光の発生と変換に関する一つの発見的な見地について」を発表した。この論文で、統計力学的考察をもとに、「小密度の単色放射はあたかも互いに独立で大きさ $\hbar\omega$ のエネルギー量子から成り立っているように振る舞う」という光量子仮説を提唱し、この仮説を用いて蛍光についてのストークスの法則と紫外線による気体のイオン化と光電効果について議論した。この論文中の統計力学的考察のなかでボルツマンの原理という呼称が使われているので、アインシュタインはボルツマンの原理を物理学の基本原理の一つと認識していたことになる。

光量子仮説は、光が物質と相互作用するときには光量子（フォトン photon）を単位としてエネルギーを授受する、との仮説である。我孫子誠也^{注5}によれば、光量子仮説を提唱したアインシュタインは電磁場の媒体としてのエーテルを否定せざるを得なくなり、このことが特殊相対論（1905年6月）へとつながった。アインシュタインにとっては、揺らぎの議論と光量子仮説の提唱と特殊相対論とは一筋道にあるのだろう。

光電効果は光を吸収した物質が真空中に電子を放出する現象であり、物質が光を吸収することで放出される電子は光電子と呼ばれている。光電効果は光電管や光電子増倍管で重要である。光電子のエネルギーを E とし、電子のエネルギーが物体中では真空中よりも仕事関数 W だけ低いとすると、エネルギー保存則と光量子仮説によれば

$$E + W = n \hbar \omega \quad (12.17)$$

となる。この関係式は、ミリカンの実験（1916年）により実証されるとともに、光電効果のアインシュタインの関係式（Einstein's photoelectric equation）と呼ばれるようになった。ミリカンの時代には強度の大きい単色光源が無かったので、実際問題としては $n = 1$ であり、単色光の振動数 ω を

^{注5} 安孫子誠也：特殊相対性理論の成立をめぐる論争、日本物理学会誌 60（2000）pp.57-58

えて光電子のエネルギー E を測定した（図12.2参照）。この線の傾きからプランク定数が決まる。実際ミリカンは光電効果の実験からプランク定数を決めている。光電子のエネルギー E の精密測定には電子の電荷が既知でなければならないが、ミリカンは電気素量の測定（1909-1912年）により既に電子の電荷を決めていた。光電効果の実験はミリカンならではの実験であろう。

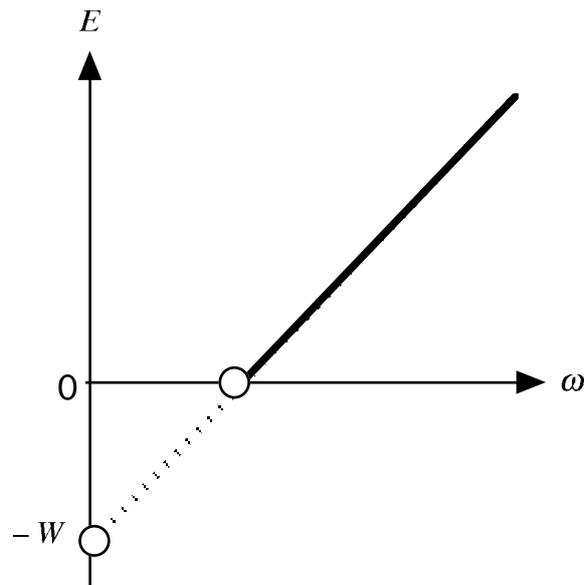


図12.2 光電子のエネルギー E の ω 依存性

アインシュタインは「理論物理学への貢献、特に光電効果の法則の発見」を受賞理由として1922年度ノーベル物理学賞を受賞し、ミリカンは電気素量の測定（1909-1912年）と光電効果（1916年）によるプランク定数の測定を受賞理由として1923年度ノーベル物理学賞を受賞した。

12.6 エネルギー量子の拡張

アインシュタインは1907年論文「輻射に関するプランクの理論と比熱の理論」で、物体と放射との間のエネルギー交換が量子化されていることの一つの証拠がプランクの放射式であることを示し、次に、固体の比熱が必ずしもエネルギー等分配則に従わない理由を明快に指摘した。プランクはプラン

クの放射式を理解するために電磁波を振動子の集まりとしたが、アインシュタインは固体の比熱を理解するために固体の振動を振動子の集まりとした。振動子のエネルギーが量子化されているとしてプランクの放射式と同様な分布関数を使って議論した。

アインシュタインが想定したモデル（アインシュタインモデルと呼ばれている）では固体は一つの角周波数 ω の振動子の集まりであり、固体のエネルギーは

$$U_{\omega}(T) \propto f\left(\frac{\omega}{T}\right) = \frac{1}{\exp\left(b \frac{\omega}{T}\right) - 1} \quad (12.18)$$

とする。これはプランクの放射式の固体への援用である。 $f(\omega/T)$ の $T/(b\omega)$ 依存性を図12.3に示す。 $T/(b\omega)$ は温度を $b\omega$ を単位として表現したもので、温度とみなして差し支えない。従って、固体のエネルギー $U_{\omega}(T)$ は温度 T の増加関数である。

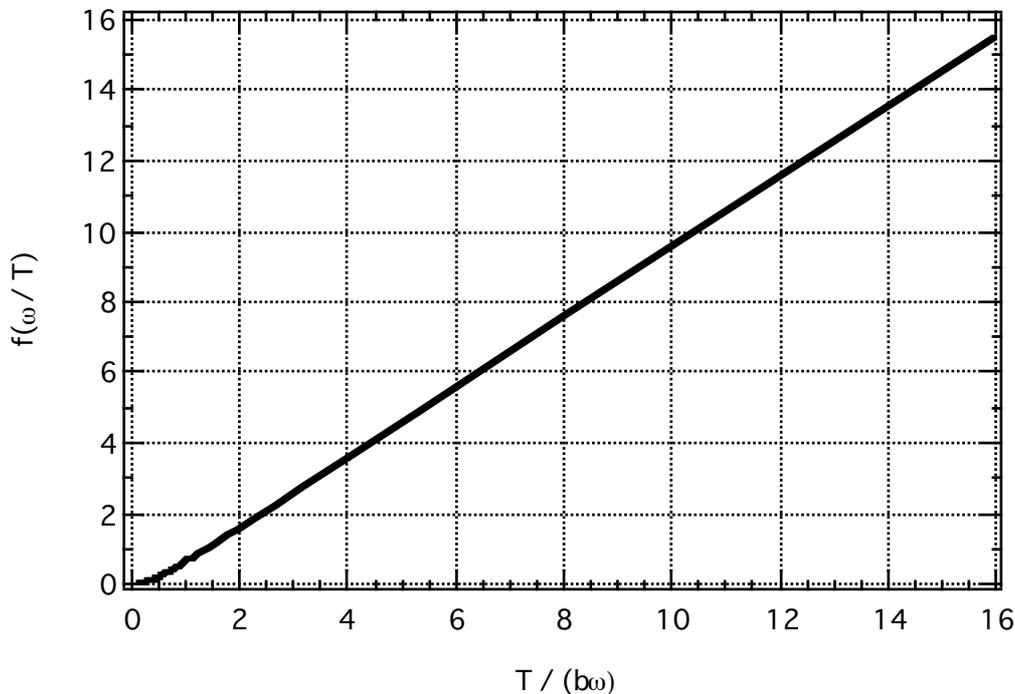


図12.3 $f(\omega/T)$ の温度依存性

ここで

$$\frac{1}{\exp\left(\frac{b\omega}{T}\right) - 1} \cong \begin{cases} \exp\left(-\frac{b\omega}{T}\right) & \text{for } T \ll b\omega \\ \frac{T}{b\omega} & \text{for } T \gg b\omega \end{cases}$$

を使うと、固体のエネルギー $U_\omega(T)$ は、高温 ($T \gg b\omega$) では温度 T に比例し、低温 ($T \ll b\omega$) では $\exp(-b\omega/T)$ に比例しOKの極限で0になる。

アインシュタインモデルから導かれる比熱はアインシュタイン比熱と呼ばれている。アインシュタイン比熱

$$C_\omega \equiv \frac{dU_\omega}{dT}$$

は、高温 ($T \gg b\omega$) では温度に依らぬ一定値となり、低温 ($T \ll b\omega$) では小さくなることが判る。より具体的には(12.18)を T で微分して

$$C_\omega \equiv \frac{dU_\omega}{dT} \propto \left[\frac{\frac{b\omega}{T}}{\exp\left(\frac{b\omega}{T}\right) - 1} \right]^2 \exp\left(\frac{b\omega}{T}\right) \quad (12.19)$$

となる。この右辺を図示すると図12.3のようになる。この図からも判るように C_ω は温度 T の増加関数であり、高温 ($T \gg b\omega$) では温度にあまり依存しない。高温で C_ω が温度に依存しないことは、高温ではエネルギーの等分配則が成り立っていることを意味する。低温では C_ω が小さく、温度依存性が大きいことは低温ではエネルギーの等分配則が破綻していることを意味する。

低温 ($T \ll b\omega$) と高温 ($T \gg b\omega$) での近似式

$$\left[\frac{\frac{b\omega}{T}}{\exp\left(\frac{b\omega}{T}\right) - 1} \right]^2 \exp\left(\frac{b\omega}{T}\right) \cong \begin{cases} \left(\frac{b\omega}{T}\right)^2 \exp\left(-\frac{b\omega}{T}\right) & \text{for } T \ll b\omega \\ 1 & \text{for } T \gg b\omega \end{cases}$$

からも、高温で C_ω が温度に依存しないことや低温で C_ω が小さく、温度依存性が大きいことが判る。また、OKの極限では C_ω が0になるだけでなく dC_ω/dT も0になる。このことはアインシュタイン比熱がネルンストの熱定理

を満足していることを示している。

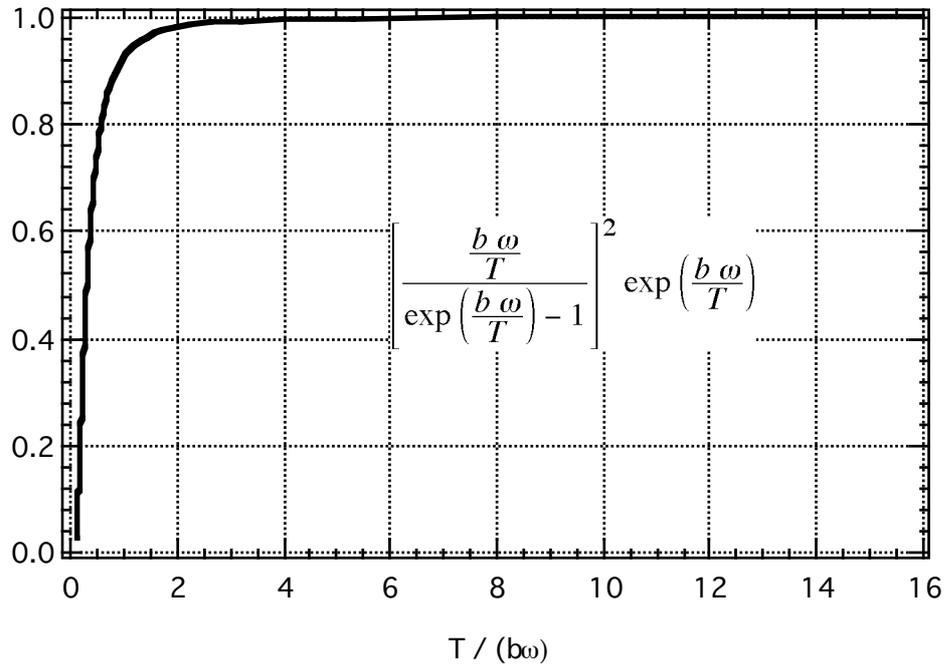


図12.3 $\left\{ \frac{b\omega}{T} / \left[\exp\left(\frac{b\omega}{T}\right) - 1 \right] \right\}^2 \exp\left(\frac{b\omega}{T}\right)$ の温度依存性

アインシュタイン比熱では温度が高いか低いかの尺度は $b\omega$ の値である。 b はプランク定数とボルツマン係数との比なので、 $b\omega$ は角周波数 ω に依存する。従って、 ω が大きいなら、室温でも低温であり、エネルギーの等分配則が破綻している。アインシュタインの1907年論文で、エネルギーの等分配則の破綻について室温でのダイヤモンドの比熱のデータを引用している。このデータはETHでアインシュタインに物理学を教えたヴェーバーによるものである。

アインシュタイン比熱が提唱された1907年は低温物理学の揺籃期でもある。ネルンスト (Walther Hermann Nernst, 1864-1941年) は、ネルンストの熱定理を提唱した (1906年) 後に、低温での固体比熱の研究に没頭し、カマリング・オネス (Heike Kamerling-Onnes, 1853-1926年) がヘリウムの液化に成功 (1908年) して、低温実験が華々しくなってきた。ネルンストは、弟子リンデマンとの共同実験でアインシュタイン比熱を支持し

(1910年)、1911年には「固体比熱は放射以外での量子仮説の最初の確認」と宣言した。

アインシュタインは固体の比熱が低温で小さくなることの説明には成功したが、アインシュタイン比熱は低温での比熱の温度依存性を正しく表現していない。実験に依れば固体の比熱は低温で温度の3乗に比例する。石原 純は1911年論文で、光量子仮説を支持するとともに、アインシュタイン比熱の修正を試みている。

デバイ (Peter Joseph William Debye, 1884-1966年) は固体で考えられる全ての角周波数の振動子を使って、固体の比熱は低温では温度の3乗に比例することを示した (1912年)。デバイが想定したモデルから導かれる比熱はデバイ比熱と呼ばれている。アインシュタインモデルでは一つの角周波数の振動子だけを想定したが、デバイは固体で考えられる全ての角周波数の振動子を使うことで、実験結果に近づいた。デバイ比熱はアインシュタイン比熱の拡張である。固体を連続体と考えて、固体の振動を振動子で表したものは音響子 (フォノン phonon) と呼ばれている。

低温では固体の比熱が温度の3乗に比例することは、シュテファン・ボルツマンの法則と同様に、低温では固体のエネルギーが温度の4乗に比例することの表れである。デバイ比熱 (1モルあたり) は低温では

$$C = \frac{12\pi^4}{5} R \left(\frac{T}{\Theta_D} \right)^3$$

である。ここで Θ_D は物質に依存する定数でありデバイ温度と呼ばれている。デバイ比熱もネルンストの熱定理を満足していることは一目瞭然である。デバイ比熱はその後の実験結果ともよく合った。

低温とは Θ_D に比べて充分低い温度を意味する。デバイ温度 Θ_D は数百Kのものが多いが、ベリリウムでは1440K、ダイヤモンドでは2230Kである。このためにダイヤモンドでは室温でも低温であり、ダイヤモンドの室温での比熱はエネルギーの等分配則から期待される値よりも著しく小さい。

2原子分子の比熱比を議論する際に振動の自由度を排除する理由もエネルギー量子の導入により理解できるようになった。2原子分子の振動モードのエネルギーは温度に換算すると室温よりもかなり高いので、室温では2原子分子の振動モードがほとんど励起されないからである。

いずれもプランクのエネルギー量子の黒体放射以外への応用例である。エネルギー量子を容認することでエネルギーの等分配則の破綻が理解できるようになった。しかし、金属の比熱に自由電子気体が寄与していないように見える理由は不明である。

1 2.7 波と粒子の二重性

エネルギーの揺らぎを調べたアインシュタインは、1909年論文「輻射の本質と構造に関するわれわれの見解の発展について」で黒体放射のプランクの式は光が波と粒子の二重性をもつことを意味することを指摘した。1909年はエネルギー量子を導入したプランク自身がエネルギー量子の必要性をともに認識した年である。プランクが放射式を議論した際にあらわれた

$$g(\omega) d\omega = \left(\frac{k}{\pi}\right)^2 dk$$

の中の $(k/\pi)^2$ は状態密度に対応し、放射式 $f(\omega/T)$ は分布関数に対応する。状態密度を調べる際には波動性に着目するが、分布関数には粒子性を考慮しなければならないのだから、光に波と粒子の二重性を認めざるを得ない。光が波と粒子の二重性をもつことは光はマクスウェル方程式に従う電磁波であるという常識と対立した。光が物体と相互作用する際には光量子として振る舞うことは物体のエネルギーも量子化されていることを意味する。このことは後のボーアの量子条件につながった。

固体比熱のデバイ模型では、固体の振動を音響子（フォノン）で表現した。古典的には波として扱う連続体の振動に音響子という粒子性を考慮したのだ。

アインシュタインは光量子論を更に発展させた。1916年論文「量子論に

よる輻射の放出と吸収」で、後にアインシュタインのA係数B係数と呼ばれるようになった2つの係数を導入し、物体による輻射の吸収と自然放出だけでなく量子論の当然の結果として誘導放射を含めている。誘導放射は現代のレーザーやレーザの基礎的過程である。1917年論文「輻射の量子論」では気体分子による光量子の吸収と放出を議論して光子の運動量が $\hbar \mathbf{k} \equiv \hbar \omega / c$ であることを示した。こうして光子はエネルギー $\hbar \omega$ と運動量が $\hbar \mathbf{k} \equiv \hbar \omega / c$ をもつ粒子となった。ここで $c = \omega / k$ は光の位相速度である。

デバイが1912年に導入した音響子もエネルギー $\hbar \omega$ と運動量が $\hbar \mathbf{k} \equiv \hbar \omega / c$ をもつ粒子となった。音響子では $c = \omega / k$ は固体中の音の位相速度である。光量子では $c = \omega / k$ が一定なので、黒体放射のように熱力学的平衡状態に達するためには熱浴の役割を果たす物体の存在が不可欠である。しかし、音響子は $c = \omega / k$ が ω に依存するので、音響子だけで熱力学的平衡状態に達することも不可能ではない。音響子で $c = \omega / k$ の ω 依存性を考慮すると、デバイ温度 Θ_D の値が見積もれるし、 Θ_D に比べて充分高温では固体の比熱が温度に依らないことを示すことができる。

光量子の運動量はコンプトン (Arthur Holly Compton, 1892-1962年) によるコンプトン効果の発見 (1922年) で立証された。この功績でコンプトンは1927年度ノーベル物理学賞を受賞した。アインシュタインの光量子仮説がまじめに受け容れられようになったのはコンプトン効果の発見 (1922年) 以降と言われている。

他方で、古典的には粒子というイメージで理解できると思われていた現象を理解するには波動性を考慮する必要があることを示したのが粒子の量子論である。ラザフォード (Ernest Rutherford, 1871-1937年) は散乱実験に基づき原子模型を提唱した (1911年)。**ラザフォードの原子模型**は正電荷をもった小さい原子核のまわりを負電荷をもった電子が運動しているものであり、太陽を中心として惑星が運動している太陽系に似ている。ラザフォードの原子模型は古典的には不安定であり、安定な原子は存在し得ない。仮に電子が運動していなければ静電力で電子が原子核に捕獲され、電子が運動して

いるとすれば、電子の加速度運動は電磁波を放出するので、電子の運動エネルギーが減少して電子が原子核に捕獲される。従って、量子条件を付加して原子を安定化する必要がある。博士論文「金属電子論の研究」(1911年)で古典物理学の限界を強く認識したボーア (Niels Bohr, 1885-1962年) はラザフォードグループに合流して、1913年論文「原子および分子の構造について」で水素スペクトルのバルマー公式の説明を行った。これはボーアの量子条件の最初の成功例であり、ボーアは1922年度ノーベル物理学賞を受賞した。ボーア理論に着目した石原純は量子条件の一般化 (1915年) を行った。

光量子仮説を受け容れたド・ブロイ (Louis Victor Pierre Raymond, 7. duc de Broglie, 1892-1987年) は、運動量 p の粒子は波長 $2\pi\hbar/p$ の仮想的波を伴うとした (1923年)。この波は物質波と呼ばれ、この波長はドブロイ波長と呼ばれている。ドブロイ波長に対応する波数を k とすると $p = \hbar k$ だから、運動量と波数との関係は光量子や音響子と同じである。しかし、1924年にド・ブロイの学位論文を審査して高い評価を与えたランジュヴァン (P. Langevin, 1872-1946年) は光量子仮説には懐疑的であり、光量子仮説を支持したのは1927年のことである。^{注6}

1927年に電子線がX線と同様に結晶で回折されることが発見された。この実験は、電子に伴う物質波の実験的証明とされている。ド・ブロイは物質波の提唱で1929年度ノーベル物理学賞を受賞した。

アインシュタインは1925年論文「一原子理想気体の量子論 (第2論文)」でド・ブロイの物質波を積極的に支持した。この論文を読んだシュレーディンガー (Erwin Rudolf Josef Alexander Schrödinger, 1887-1961年) は物質波についてのシュレーディンガー方程式を提唱した (1926年)。電子に伴う物質波が定在波となる場合にはラザフォードの原子模型が安定になることはメンデレーエフ (D. I. Mendeleev, 1834-1907年)

^{注6} 小島智恵子：Einsteinとde Broglieの架け橋、Langevinの本音、日本物理学会紙60 (2005) pp.814-816

(1869年) 以来の周期律表の解釈に役立った。ボルン (Max Born、1882-1970年) は、物質波を確率波と解釈し (1926年) 、この功績で1954年度ノーベル物理学賞を受賞した。

このように、前期量子論は、古典的には波として記述されてきた現象に粒子性が現れることを容認する場の量子論から始まり、少し遅れて、古典的には粒子として記述されてきた現象に波動性が現れることを容認する粒子の量子論が始まった。粒子の量子論という言い方よりも物質波の干渉論と言うべきかもしれない。物質波の干渉性が本質的だからである。このような状況では凡庸な科学者は、日曜日毎に教会で懺悔して、波動性に着目して研究する週と粒子性に着目して研究する週とを繰り返さざるを得ない。

量子論の定式化では場の量子論よりも粒子の量子論のほうが早かった。粒子の量子論はボルン、ハイゼンベルク (Werner Karl Heisenberg、1901-1976年) 、ヨルダン (Ernst Pascual Jordan、1902-1980年) による行列表示の量子力学 (1925年) 、シュレーディンガーによるシュレーディンガー方程式 (1926年) を通して、ハイゼンベルグの不確定性原理 (1927年) で定式化された。不確定性原理は波動性と粒子性の二重性を簡潔に表現している。場の量子論がフォック (Vladimir Aleksandrovich Fock、1899-1974年) により明快に定式化されたは1932年のことだった。このために場の量子化は第二量子化とも呼ばれている。

波動性と粒子性の二重性を許容する量子論がきちんと定式化された後の科学者は波動性と粒子性の二重性に悩むことが無くなった。

1 2.5 まとめ

黒体放射の放射式を検討することから量子論が誕生した。2原子分子の比熱比、アインシュタイン比熱やデバイ比熱など、熱力学的平衡状態の熱現象が牽引力となって、場の量子論が始まった。

統計物理学に残された第2の問題「エネルギーの等分配則の破綻」はエネルギー量子の導入根拠である。場の量子論はエネルギーの等分配則の破綻理

由を理解するために出現したとも言える。しかし金属の比熱に自由電子気体が寄与しないように見える理由は不明である。

前期量子論は波と粒子の二重性を認識し、これを定式化する努力だった。量子論の定式化では、粒子の量子論が先行したので、場の量子論は第二量子化と呼ばれるようになった。